EXTENSÃO DE UM TEOREMA DE CARLESON

ELIZABETH ADORNO DE ARAUJO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requesito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. BENJAMIN BORDIN

Este trabalho foi parcialmente realizado com o auxílio financeiro da Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior [CAPES] e da Financiadora Nacional de Estudos e Projetos [FINEP]

- 1980 -

A meus pais,

Guilherme e Jairo.

Agradeço:

Ao Prof. Carlos Segóvia Fernandez, por ter-me proposto este trabalho e me orientado por longo período, só não tendo concluído esta orientação por motivo de viagem.

Ao Prof. Benjamin Bordin, meu atual orientador, que acompanhou todo o trabalho e me ajudou na elaboração final do mesmo, com uma dedicação sem par.

A todos aqueles que direta ou indiretamente me apoiaram e incentivaram.

Ao CAPES e FINEP pelo apoio financeiro.

INTRODUÇÃO

Lennart Carlerson em [2] obteve o seguinte resultado:

"Seja μ uma medida finita em $|z| < 1$ tal que existe uma constante A satisfazendo $\mu(S_h) \leq A\,h$ para todo $S_h = \{ re^{i\theta} : r \geq 1-h \ \text{ e } \ \theta o \leq \theta \leq \theta o + h \}$. Então para toda função f de H^p com $p \geq 1$ existe uma constante C tal que

$$\int_{|z|<1} |f(z)|^p \, d\mu \leq C \, \| f \|_{H^p} .$$

E reciprocamente."

Uma extensão deste teorema é apresentado por Peter L. Duren, em [4] , da seguinte forma:

"Sejam p e q tais que $0 < p \leq q < \infty$.

Então $\mu(S_h) \leq A\,h^{q/p}$ se, e somente se ,

$$(*) \qquad \left\{ \int_{|z|<1} |f(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq C \, \| f \|_{H^p}$$

para toda função f do H^p ".

O objetivo do nosso trabalho é apresentar a demonstração desse teorema, procurando esclarecer todas as passagens nela contida.

Para isso, vamos dividir nosso trabalho em três capítulos.

O primeiro capítulo constará de algumas definições e resultados necessários para o capítulo seguinte.

No segundo capítulo apresentaremos, inicialmente, alguns resultados e algumas observações que serão utilizados na demonstração do teorema de P. Duren.

Entre as observações destacamos aquela que nos garante que é suficiente provar o teorema para $p = 2$ (ver (2-8)).

Entre os resultados está provado que toda função do H^2 é escrita como a integral de Poisson de sua função limite (ver (2-3)).

Diante, destes fatos, é suficiente mostrar que

$$\left\{ \int_{|z|<1} |u(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq C \, \|\phi\|_2$$

onde u é a integral de Poisson da função $\phi \in L^2$, $\phi > 0$ para provarmos (*) .

Para tal prova, definiremos a função

$$\tilde{\phi}(z) = \sup \frac{1}{I} \int_I \phi(t)dt$$

onde o supremo é tomado sobre os intervalos $I \supset I_z$ $(|I| < 1)$ com

$I_z = \{e^{it} : \theta - \frac{1}{2}(1-r) \leq t \leq \theta + \frac{1}{2}(1-r)\}$ sendo $z = re^{i\theta}$.

Daí, para se concluir a demonstração, é suficiente provar que o operador T que a cada ϕ associa $\tilde{\phi}$ é do tipo forte (2-q) . Mas, utilizando o teorema de interpolação de Marcinkiewcs, basta mostrar que T é do tipo fraco (1-q).

Para a recíproca, utilizamos uma particular função de H^2 de onde tiramos o resultado.

No terceiro capítulo, faremos uma aplicação deste teo_ rema no espaço H^p .

CAPÍTULO I

NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Seja μ uma medida σ-finita sobre $\mathbb{R}^n$, X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $0 < p < \infty$, f uma função mensurável em X e

$$\| f \|_{p,\mu} = [\int_X |f(x)|^p \, d\mu]^{1/p} .$$

Definimos $L^p(X,d\mu)$ como sendo o espaço das funções f tais que $\| f \|_{p,\mu} < \infty$. Ao valor $\| f \|_{p,\mu}$ denominamos *norma* L^p de f.

Para $p = \infty$, $L^\infty(X,d\mu)$ é o espaço das funções limitadas com exceção de um conjunto de medida nula e

$$\| f \|_{\infty,\mu} = \inf \{A : \mu \{ x : |f(x)| > A\} = 0\} .$$

Quando não especificarmos a medida μ, estaremos considerando a medida de Lebesque e nesse caso $L^p(X, dx)$ será denotado por $L^p(X)$ e $\| f \|_{p,dx}$ por $\| f \|_p$.

Vamos ver, agora, alguns resultados referentes aos espaços $L^p(X)$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(X) , \| . \|_p)$ é um espaço de Banach.

A *desigualdade de Schwarz*: Sejam f e g funções pertencentes a $L^2(X)$. Então f.g pertence a $L^1(X)$ e

$$\| f.g \|_1 \leq \| f \|_2 . \| g \|_2 .$$

A *desigualdade de Minkowski*: Sejam $f_n (n=1,2,\ldots)$ funções do $L^p(X)$. Então

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_p .$$

A *fórmula de Parseval*: (ver [6]) . Seja f uma função de $L^p(X)$ e $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}_n e^{inx}$ a forma complexa da série de Fourier de f , onde

$$\mathbb{C}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x). e^{-inx} dx$$

Então $\| f_n \|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mathbb{C}_n|^2$.

DEFINIÇÃO: Seja f pertencente a $L^p([-\pi, \pi])$. Definimos a *integral de Poisson de* f por

$$u(r,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r,t-x)\, f(t)\, dt$$

onde

$$P(r,\phi) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\phi + r^2} .$$

A função $P(r,\phi)$ é denominada *núcleo de Poisson*. Temos o seguinte lema:

(1 - 1) *Lema:* $P(r,\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\phi}$.

Demonstração: Observemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\phi} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{-in\phi} - 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (r\, e^{i\phi})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (r\, e^{-i\phi})^n - 1 .$$

Cada um dos somatórios acima constitui uma série geométrica infinita de razão menor do que 1 . Logo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\phi} = \frac{1}{1-r\,e^{i\phi}} + \frac{1}{1-r\,e^{-i\phi}} - 1$$

$$= \frac{1-r\,e^{i\phi} + 1 - re^{-i\phi} - (1-r\,e^{i\phi})\,(1-r\,e^{-i\phi})}{(1-r\,e^{i\phi})\,(1-r\,e^{-i\phi})}$$

Segue que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\phi} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\phi+r^2} = P(r,\phi) \qquad \blacksquare$$

DEFINIÇÃO: Sejam $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ e T um operador de $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu_1)$ em $L^q(\mathbb{R}^n, d\mu_2)$. Dizemos que T é um *operador sub-linear* se

$T(f_1 + f_2)$ é bem definido, sempre que $T(f_1)$ e $T(f_2)$ estão definidos, e:

$$|T(f_1 + f_2)| \leq |T(f_1)| + |T(f_2)| .$$

Um operador T de $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu_1)$ em $L^q(\mathbb{R}^n, d\mu_2)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, é um *operador tipo forte* (p,q) se existe uma constante M , tal que:

$$\| T(f) \|_{q,\mu_2} \leq M \| f \|_{p,\mu_1} , \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n, d\mu_1) .$$

O menor valor de M denominamos *norma* (p,q) de T .

Um operador T de $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu_1)$ em $L^q(\mathbb{R}^n, d\mu_2)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q < \infty$, é um *operador tipo fraco* (p,q) se existe uma constante M , tal que:

$$\mu_2\{ z : |T(f(z))| < y \} \leq \frac{M}{y^q} \| f \|^q_{p,\mu_1} ,$$

para toda função f de $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu_1)$ e $y > 0$.

O menor valor de M denominamos *norma fraca* (p,q) de T .

Se $q = \infty$, diremos que T é do tipo fraco (p,∞) se T for do tipo forte (p,∞) .

(1-2) *Teorema de Marcinkiewicz:* Sejam (α_1, β_1) e (α_2, β_2) dois pontos do triângulo $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ $(\beta_1 \neq \beta_2)$.
Seja T um operador sub-linear, simultaneamente do tipo fraco $(1/\alpha_1, 1/\alpha_2)$ e $(1/\beta_1, 1/\beta_2)$, com normas M_1 e M_2 , respectivamente. Então para todo ponto (α, β) onde $\alpha = (1-t)\alpha_1 + t\alpha_2$ e $\beta = (1-t)\beta_1 + t\beta_2$, o operador T é do tipo forte $(1/\alpha, 1/\beta)$ com:

$$\| T(f) \|_{1/\beta} \leq K M_1^{1-t} M_2^t \| f \|_{1/\alpha} ,$$

onde $K = K_{t,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}$ independe de f , e é limitado se $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ são fixados e t varia entre 0 e 1 .

Demonstração: (ver [7] - pag. 111 - Vol. II) ∎

Apresentaremos, agora, alguns resultados de séries duplas, que serão utilizados posteriormente.

DEFINIÇÃO: Seja f uma sequência dupla. A sequência dupla s, definida por

$$s(p,q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} f(m,n)$$

é denominada *série dupla* e será denotada por $\sum_{m,n} f(m,n)$.

A série dupla $\sum_{m,n} f(m,n)$ se diz *convergente* para a soma "a" se:

$$\lim_{p,q \to \infty} s(p,q) = a .$$

Cada número $f(m,n)$ é chamado *têrmo* da série dupla, e, cada $s(p,q)$, de *soma parcial*.

A série dupla $\sum_{m,n} f(m,n)$ é *absolutamente convergente* quando $\sum_{m,n} |f(m,n)|$ converge.

O seguinte teorema de séries duplas será utilizado no presente trabalho, e aqui colocado sem demonstração.

(1-3) *Teorema:* Sejam $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ séries absolutamente convergentes com somas A e B, respectivamente. Seja f a sequência dupla definida pela equação

$$f(m,n) = a_n . b_n \quad ; \quad (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} .$$

Então $\sum\limits_{m,n} f(m,n)$ converge absolutamente e tem soma AB .

DEFINIÇÃO: Seja f uma sequência dupla, e g uma bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Consideremos G a sequência definida por $G(n) = f(g(n))$ com n pertencente à $\mathbb{N}$. Neste caso, g é dito ser um *arranjo* da sequência dupla f na sequência G .

O teorema abaixo, sobre arranjo, nos garante que, se a série for absolutamente convergente, a soma é a mesma, qualquer que seja o arranjo dado.

(1-4) *Teorema:* Seja $\sum\limits_{m,n} f(m,n)$ uma série dupla e g um arranjo da sequência dupla f na sequência G . Então:

a) $\sum\limits_{n} G(n)$ converge absolutamente se, e somente se, $\sum\limits_{m,n} f(m,n)$ converge absolutamente

b) se a $\sum\limits_{m,n} f(m,n)$ converge absolutamente e $\sum\limits_{m,n} f(m,n) = S$ temos $\sum G(n) = S$.

Estes resultados sobre séries duplas podem ser encontrados em [1] pág. 372 .

DEFINIÇÃO: Seja $0 < p < \infty$. Entenderemos por H^p o espaço das funções f analíticas em $|z| < 1$, tais que:

$$\|f\|_{H^p} = \lim_{r \to 1} \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\, e^{i\theta})|^p \, d\theta \right]^{1/p} .$$

Usualmente, $\|f\|_{H^p}$ é denominada "*norma*" H^p de f.

OBSERVAÇÃO: Para $p < 1$, $\|f\|_{H^p}$ não é uma norma no sentido usual, pois não satisfaz necessariamente a desigualdade triangular. Podemos, entretanto, definir uma distância $d(f,g)$ entre dois elementos f e g de H^p por:

$$d(f,g) = \| f - g \|^p_{H^p} .$$

Com a distância assim definida, H^p é um espaço métrico completo.

Veremos, agora, alguns resultados dos espaços H^p que serão utilizados no nosso trabalho. As demonstrações podem ser encontradas em [7] - Vol. I - págs 271-284.

Consideremos uma função f analítica em $|z| < 1$ com $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ todos os zeros de f, distintos da origem e contados de acordo com a sua multiplicidade. Suponhamos que f tenha um zero de multiplicidade k na origem. Então são válidos os seguintes resultados:

(1-5): Se $f \in H^p$ temos que $\prod_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|$ converge.

(1-6): Se $0 < |\zeta_n| < 1$ e $\prod_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|$ converge, temos que o produtório

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z-\zeta_n}{z-\zeta_n^*} \frac{1}{|\zeta_n|} \text{, onde } \zeta_n^* = 1/\bar{\zeta}_n \text{ ,}$$

converge absoluta e uniformemente em todo disco fechado $|z| \leq r$, $0 < r < 1$. Além disso, a função limite, que denotaremos por $\beta(z)$, é regular com $|\beta(z)| \leq 1$ e ζ_1 , ζ_2 , ..., ζ_n , ... são os zeros de $\beta(z)$.

(1-7): Se $f \in H^p$ e g é uma função definida por

$$g(z) = \frac{f(z)}{B(z)} \text{ , onde}$$

$B(z) = e^{i\sigma} z^k \beta(z)$, com σ um número real, temos que $g(z)$ é uma função regular que não tem zeros em $|z| < 1$; além disso, $g \in H^p$ e f pode ser escrita por:

$$f(z) = g(z) \cdot B(z) \text{ .}$$

A função $B(z)$ é conhecida como produto de Blaschke da f .

(1-8): Se $f \in H^p$, o limite não tangencial de f , quando z se aproxima de e^{ix} , existe e vale $f(e^{ix})$. Além disso,

$$f(e^{ix}) = g(e^{ix}) \cdot B(e^{ix}) \quad \text{e} \quad |B(e^{ix})| = 1 .$$

(1-9): Se $f \in H^p$ temos

$$\lim_{r \to 1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right] = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \, d\theta \right]^{1/p} .$$

CAPÍTULO II

Neste capítulo, vamos apresentar a demonstração de um teorema devido a P. Duren (ver [4]) . Este teorema nos dá uma caracterização de medidas finitas μ no disco aberto $|z| < 1$ para que tenhamos limitação do tipo

$$(2\text{-}1) \qquad \left\{ \int_{|z|<1} |f(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq A \, \|f\|_{H^p}$$

para toda f pertencente ao espaço H^p .

Vamos inicialmente enunciar e demonstrar alguns lemas e fazer algumas observações sobre (2-1) que serão utilizadas na demonstração deste teorema.

(2-2) *Lema:* Seja C uma constante positiva.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} < C$ para todo r com $0 < r < 1$ então

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < C$.

Demonstração: De $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} < C$ temos que, para todo número $N > 0$, $\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} < C$.

Logo, no limite, quando r tende a 1 , teremos:

$$\lim_{r \to 1} \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \, r^{2n} < C \; ,$$

ou seja, $\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 < C$ para todo número $N > 0$.

Então, por definição

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < C \qquad \blacksquare$$

(2-3) *Lema:* Seja $f \in H^2$. Então f pode ser escrita como a integral de Poisson de sua função limite.

Demonstração: Como $f \in H^2$, pelo desenvolvimento de Taylor, temos que

$$f(re^{i\phi}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, r^n \, e^{in\phi} \; ,$$

onde $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ para $n \neq 0$ e

$a_0 = f(0)$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, r^n \, e^{in\phi}$ tem raio de convergência menor ou igual a 1 .

Pelos teoremas (1-3) e (1-4) sobre séries duplas temos:

$$(2\text{-}4) \qquad |f(re^{i\phi})|^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\phi}\right) . \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{-im\phi}\right)$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n . \overline{a_m} \, r^{n+m} e^{i(n-m)\phi}$$

está bem definida e é absolutamente convergente.

Como a função f pertence a H^2, temos por definição que existe uma constante C tal que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\phi})|^2 \, d\phi < C \, .$$

Portanto, segue por (2-4) que

$$(2\text{-}5) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} \, r^{n+m} e^{i(n-m)\phi} \right| d\phi < C \, .$$

Pelo fato de $|a_n . \overline{a_m} \, r^{n+m} e^{i(n-m)\phi}| \leq |a_n \overline{a_m}| \, r^{n+m}$

e de $\sum_{n,m=0}^{\infty} |a_n \overline{a_m}| r^{n+m}$ ser convergente segue, pelo critério de Weierstrass, que

$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} \, r^{n+m} e^{i(n-m)\phi}$ é uniformemente convergente em ϕ. Então podemos integrar (2-5) têrmo a têrmo obtendo:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\phi} d\phi < C .$$

Entretanto, como $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi = 0$ para $n \neq m$ e $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi = 2\pi$ para $n = m$ temos que

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{a_n} r^{2n} 2\pi < C ,$$

ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} < C$ para todo $0 < r < 1$.

Pelo lema (2-2) concluimos a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$.

Consideremos, agora, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\phi} .$$

Vamos mostrar que essa série tem sentido em L^2 .

Como $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ é convergente, temos que: dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural N_0 tal que para todo $m > N_0$, $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|^2 < \varepsilon$. Então para $m > N_0$, obtemos

$$\left\| \sum_{n=m}^{m+p} a_n e^{in\phi} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=m}^{m+p} a_n e^{in\phi} \cdot \sum_{j=m}^{m+p} \bar{a}_j e^{-ij\phi} \right] d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n,j=m}^{m+p} a_n \bar{a}_j e^{i(n-j)\phi} \right] d\phi .$$

Podemos integrar têrmo a têrmo a série acima e obtemos que:

$$\left\| \sum_{n=m}^{m+p} a_n e^{in\phi} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n,j=m}^{m+p} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \bar{a}_j e^{i(n-j)\phi} d\phi \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=m}^{m+p} |a_n|^2 \cdot 2\pi = \sum_{n=m}^{m+p} |a_n|^2 < \varepsilon .$$

Como L^2 é completo, existe uma função $g \in L^2$ tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\phi} = g(\phi) .$$

Mostremos que:

$$\lim_{r \to 1} f(re^{i\phi}) = g(\phi) .$$

Pela fórmula de Parseval, e como:

$$\| f(re^{i\phi}) - g(\phi) \|_2^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r^n - 1) e^{in\phi} \right\|_2^2 \qquad \text{temos}$$

$$(2\text{-}6) \qquad \| f(re^{i\phi}) - g(\phi) \|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |r^n - 1|^2 .$$

Levando em conta que $\lim_{r \to 1} |r^n - 1| = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ converge, dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural $N > 0$, tal que para r suficientemente próximo de 1 temos:

$$(2\text{-}7) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |r^n - 1|^2$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 |r^n - 1|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2 |r^n - 1|^2$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

De (2-6) e (2-7) obtemos para r suficientemente próximo de 1 que:

$$\| f(re^{i\phi}) - g(\phi) \|_2^2 < \varepsilon .$$

Falta apenas verificarmos que:

$$u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta)\, g(\phi-\theta) d\theta$$

é $f(re^{i\phi})$.

Para isso vamos mostrar inicialmente que

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta) \sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{in(\phi-\theta)} d\theta = 0 \quad .$$

Observemos que dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural $N_0 > 0$ tal que

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{M_r}$$

onde

$$M_r = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | \ P(r,\theta) \ |^2 \, d\theta \right\}^{1/2} \qquad \text{é fixo .}$$

Pela desigualdade de Schwarz temos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta) \ . \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n e^{in(\phi-\theta)} d\theta$$

$$\leqslant M_r \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n e^{in(\phi-\theta)} \right]^2 d\theta \right\}^{1/2} .$$

Pela fórmula de Parseval aplicada ao segundo membro de desigualdade e pela observação acima segue

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta) \ . \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n e^{in(\phi-\theta)} d\theta \leqslant M_r \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant \varepsilon \ .$$

Portanto, podemos considerar

$$u(re^{i\phi}) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta) \; . \; \sum_{n=0}^{m} a_n \; e^{in(\phi-\theta)} d\theta \; .$$

Por (1-1) temos:

$$P(r,\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} e^{ij\theta} \; .$$

Como esta sẽrie converge uniformemente e absolutamente para $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ temos:

$$u(re^{i\phi}) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} e^{ij\theta} \right] . \left[\sum_{n=0}^{m} a_n \; e^{in(\phi-\theta)} \right] d\theta$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{\substack{j=-\infty \\ n=0,m}}^{\infty} a_n \; r^{|j|} e^{i(j-n)\theta} \; e^{in\phi} \right] d\theta \; .$$

Integrando têrmo a têrmo resulta que

$$u(re^{i\phi}) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=-\infty \\ n=0,m}}^{\infty} a_n \; r^{|j|} e^{in\phi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-n)\theta} \; d\theta$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{m} a_n \; r^n \; e^{in\phi} \; . \; 2\pi \; ,$$

donde

$$u(re^{i\phi}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\phi} = f(re^{i\phi}) \quad .$$

Assim, temos demonstrado o Lema. ∎

Conforme falamos no início faremos algumas observações que farão parte da demonstração do teorema central deste trabalho.

(2-8) *Se* (2-1) *é válido para* H^2 *, então será válido para* H^p *com* $0 < p < \infty$.

Tomemos, primeiramente, uma função f pertencente ao espaço H^p que não possui nenhum zero em $|z| < 1$.

Seja $g(z) = [f(z)]^{p/2}$. Então g é uma função analítica em $|z| < 1$ e além disso

$$\lim_{r \to 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2} =$$

$$= \lim_{r \to 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/2}$$

$$= \| f \|_{H^p}^{p/2} < \infty$$

ou seja, $g \in H^2$ e $\| g \|_{H^2} = \| f \|_{H^p}^{p/2}$.

Como estamos supondo que o teorema é válido para o espaço H^2 temos

$$\left\{ \int_{|z|<1} |g(z)|^{s} d\mu \right\}^{1/s} \leq C \, \| g \|_{H^2}$$

onde $s \geq 2$. Segue que

$$\left\{ \int_{|z|<1} |f(z)|^{\frac{ps}{2}} d\mu \right\}^{1/s} \leq C \, \| f \|_{H^p}^{p/2} .$$

Elevando à $2/p$ ambos os membros da desigualdade, temos

$$\left\{ \int_{|z|<1} |f(z)|^{\frac{ps}{2}} d\mu \right\}^{2/ps} \leq C^{2/p} . \| f \|_{H^p}$$

onde $\frac{ps}{2} = q \geq p$, pois, $s \geq 2$.

Este primeiro caso, nos demonstra que se (2-1) é válido para as funções do espaço H^2 então será válido para as funções do espaço H^p que não possuem nenhum zero no círculo aberto $|z| < 1$.

Vamos analisar, agora, o caso de uma função f do H^p , f não identicamente nula, tal que f tenha zeros em $|z| < 1$. Como os zeros de uma função analítica são isolados, temos que existe no máximo um nº enumerável de zeros da f em

$|z| < 1$.

Sejam $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ todos os zeros de f situados em $|z| < 1$, distintos da origem e enumerados de acordo com a sua multiplicidade. Seja a origem um zero de ordem k de f .

Tomemos $B(z) = e^{i\sigma} z^k \prod_n \dfrac{z - \zeta_n}{z - \zeta_n^*} \dfrac{1}{|\zeta_n|}$,

o produto de Blaschke da f . Então por (1-7) temos que a função

$$g(z) = \frac{f(z)}{B(z)}$$ é uma função

analítica de H^p que não tem zeros em $|z|<1$. Além disso, $f(z) = g(z)B(z)$.

Por (1-6) e pela definição de $B(z)$ temos $|B(z)|<1$ para $|z|<1$.

Como $g(z)$ não tem zeros em $|z|<1$ segue pelo que vimos anteriormente que vale o teorema para g .

Assim,

$$\left\{ \int_{|z|<1} |f(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} = \left\{ \int_{|z|<1} |g(z)|^q \, |B(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \tag{2-9}$$

$$\leq \left\{ \int_{|z|<1} |g(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq C \, \|g\|_{H^p}$$

onde $q/p \geq 1$.

Por (1-9) e (1-8) temos que:

$$\| f \|_{H^p}^p = \lim_{r \to 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta}) \, . \, B(e^{i\theta})|^p \, d\theta \quad .$$

De $|B(e^{i\theta})| = 1$ segue novamente por (1-9) que:

$$\| f \|_{H^p}^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^p \, d\theta =$$

$$= \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p \, d\theta$$

$$= \| g \|_{H^p}^p \quad .$$

Logo em (2-9) temos que

$$\left\{ \int_{|z|<1} |f(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leqslant C \, \| f \|_{H^p} \, .$$

Concluimos, do primeiro e do segundo caso, que se a desigualdade (2-1) for válida para as funções do espaço H^2 então será válido para as funções do espaço H^p com $0 < p < \infty$. ∎

Uma segunda observação que faremos é a seguinte:

(2-10) Se para toda função $g \in L^2$ existe uma constante C tal que

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |u(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq C \, \|g\|_2$$

onde u é a integral de Poisson da g

então, para toda função $f \in H^2$ é válida (2-1) .

Demonstremos tal afirmação: Seja uma função f pertencente ao espaço H^2 . Pelo lema (2-3) temos que

$$\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) = g(e^{i\theta}) \in L^2$$

e

$u(z) = f(z)$ onde u é a integral de Poisson da função g .

Pela hipótese, temos

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq C \, \|g\|_2 \, .$$

Como $\|g\|_2 = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \right\}^{1/2}$ de (1-9) segue que

$$\|g\|_2 = \lim_{r\to 1} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \right\}^{1/2} = \|f\|_{H^2}$$

o que demonstra (2-10) .

Na observação (2-10) podemos considerar apenas as funções ϕ do L^2 positivas.

De fato: Se $\phi \in L^2$ então podemos escrever $\phi(z) = \phi_1(z) + i\phi_2(z)$ onde $\phi_1 = \mathbb{R}\text{eal}\ \phi$ $\phi_2 = \text{Im}\,\phi$.

Como cada $\phi_i(z)$ $(i=1,2)$ é real temos que pode ser decomposta em:

$$\phi_i(z) = \phi_{i1}(z) - \phi_{i2}(z) \quad \text{onde,}$$

$$\phi_{i1}(z) = \begin{cases} \phi_i(z) & \text{se } \phi_i(z) \geq 0 \\ 0 & \text{se } \phi_i(z) < 0 \end{cases}$$

e

$$\phi_{i2}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } \phi_i(z) \geq 0 \\ -\phi_i(z) & \text{se } \phi_i(z) < 0 \end{cases}$$

Temos que cada ϕ_{ij} $(i=1, 2$ e $j=1, 2)$ é uma função positiva e além disso

(2-11) $$|\phi(z)|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} |\phi_{ij}(z)|^2 .$$

Lembrando que: dado dois nºs reais positivos a e b com $a \geq b$ e um nº r positivo, valem as desigualdades

$$(a+b)^r \leq (2a)^r \leq 2^r(a^r + b^r)$$

e

$$a^{1/2} + b^{1/2} \leq 2^{1/2}(a+b)^{1/2} .$$

Denotando por u_{ij} a integral de Poisson de ϕ_{ij} teremos que:

$$|u(z)| = \left(\sum_{i,j=1}^{2} |u_{ij}(z)|^2 \right)^{1/2} .$$

e pelas desigualdades consideradas acima temos que para $q \geq 2$

$$|u(z)|^q \leq 2^q \sum_{i,j=1}^{2} |u_{ij}(z)|^q$$

e

$$\left(\int_{|z|<1} |u(z)|^q d\mu \right)^{1/q} \leq 2 \left(\int_{|z|<1} \sum_{i,j=1}^{2} |u_{ij}(z)|^q d\mu \right)^{1/q}$$

$$\leq 2 .\, 2^{2/q} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\int_{|z|<1} |u_{ij}(z)|^q \, d\mu \right)^{1/q} .$$

Logo, como estamos supondo que para as funções $\phi \in L^2$, $\phi > 0$ é válido que

$$\left(\int_{|z|<1} |u(z)|^q \, d\mu \right)^{1/q} \leq C \|\phi\|_2 .$$

segue que

$$\text{(2-12)} \qquad \left(\int_{|z|<1} |u(z)|^q \, d\mu(z) \right)^{1/q} \leq 2.2^{2/q} \sum_{i,j=1}^{2} C_{ij} \|\phi_{ij}\|_2$$

Como, por definição, temos que:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \|\phi_{ij}\|_2 = \sum_{i,j=1}^{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_{ij}(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \right)^{1/2} \leq$$

$$2 \left(\sum_{i,j=1}^{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi_{ij}(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \right)^{1/2} .$$

Segue de (2-11) que:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \|\phi_{ij}\|_2 = 2 \|\phi\|_2 .$$

Portanto, podemos concluir em (2-12) que existe uma

uma constante A tal que:

$$\left(\int_{|z|<1} |u(z)|^q \, d\mu \right)^{1/q} \leq A \, \|\phi\|_2$$

o que demonstra nossa observação. ∎

Demonstremos agora um lema de recobrimento, para isto necessitamos da seguinte definição

Para cada ponto $z = re^{i\theta}$ em $0 < |z| < 1$ vamos considerar o arco I_z definido por

$$I_z = \{ e^{it} : \theta - \frac{1}{2}(1-r) \leq t \leq \theta + \frac{1}{2}(1-r) \}$$

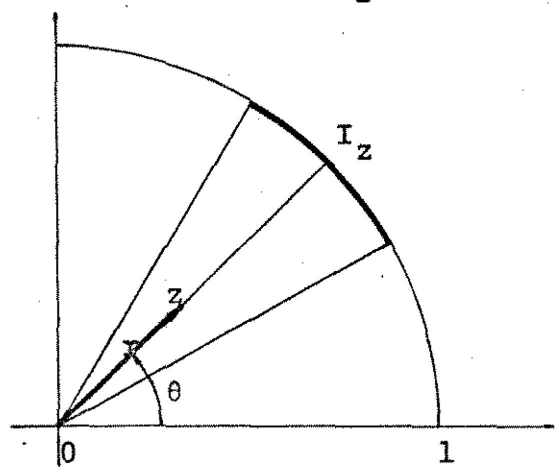

fig. 1

Tomando θ variando de 0 a 2π. Identificamos I_z com o intervalo da reta

$$[\theta - \frac{1}{2}(1-r) \, , \, \theta + \frac{1}{2}(1-r)] \, .$$

(2-13) *Lema do Recobrimento:* Seja A um conjunto não vazio em $|z| < 1$ que não contém uma sequência infinita de pontos z_n cujos arcos associados I_{z_n} são disjuntos. Então existe um número finito de pontos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ em A tal que os arcos I_{z_n} são disjuntos e

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{m} \{z : I_z \subset J_{z_n}\}$$

onde $|J_{z_n}| = 5|I_{z_n}|$ e J_{z_n} tem o mesmo centro que I_{z_n}.

Demonstração: Seja z_1 pertencente a A tal que $|I_{z_1}| > \frac{1}{2} \sup_{z \in A} |I_z|$ e seja J_{z_1} com centro em I_{z_1} e com $|J_{z_1}| = 5|I_{z_1}|$.

Seja $B_1 = A - \{z : I_z \subset J_{z_1}\}$. Se B_1 for vazio nada mais temos que fazer pois $A \subset \{z : I_z \subset J_{z_1}\}$. Se B_1 for não vazio podemos tomar z_2 em B_1 tal que

$$|I_{z_2}| > \frac{1}{2} \sup_{z \in B_1} |I_z| .$$

Consideremos os intervalos $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$ associados aos arcos I_{z_1} e I_{z_2} respectivamente com $0 < a_1 < b_1$ e $0 < a_2 < b_2$.

Se existir um ponto x em $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$ teríamos que $0 \leq a_1 < a_2 \leq x \leq b_1 < b_2$. Pela escolha de z_1 temos que $2|I_{z_1}| > |I_{z_2}|$, ou seja,

$$2(b_1 - a_1) > (b_2 - a_2) .$$

Ao J_{z_1} temos que o intervalo correspondente é dado por

$$\left[\frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{5}{2}(b_1 - a_1) ,\ \frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{5}{2}(b_1 - a_1)\right] =$$

$$= [\,3a_1 - 2b_1 ,\ -2a_1 + 3b_1]$$

Como $x - a_2 > 0$ temos que

$$b_2 < x + (b_2 - a_2) < x + 2(b_1 - a_1) <$$
$$b_1 + 2(b_1 - a_1) = 3b_1 - 2a_1$$

e como $x - b_2 < 0$ obtemos

$$a_2 > x - (b_2 - a_2) > x - 2(b_1 - a_1) >$$
$$a_1 - 2(b_1 - a_1) = 3a_1 - 2b_1 ,$$

donde concluimos que I_{z_2} está contido em J_{z_1} , ou seja, z_2 pertence a B_1 , o que é falso.

Logo, temos $I_{z_1} \cap I_{z_2} = \emptyset$.

Do mesmo modo consideremos

$$B_2 = A - \bigcup_{n=1}^{2} \{ z : I_z \subset J_{z_n} \}$$

Se B_2 é vazio nada mais temos que fazer.

Se B_2 não for vazio, consideremos um ponto z_3 pertencente à B_2 tal que

$$|I_{z_3}| > \frac{1}{2} \sup_{z \in B_2} |I_z| \quad \text{e teríamos}$$

$$I_{z_3} \cap I_{z_1} = \emptyset \quad \text{e} \quad I_{z_3} \cap I_{z_2} = \emptyset \ .$$

Como, por hipótese, em A não existe uma sequência infinita z_n cujos arcos associados I_{z_n} são disjuntos temos que existem $z_1, z_2, \ldots, z_m$ em A tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{m} \{z : I_z \subset J_{z_n}\}$. ∎

(2-14) Como uma última observação, vamos mostrar que dado um arco I

$$I = \{ e^{it} : \phi_0 \leqslant t \leqslant \phi \} \quad \text{com} \quad |I| < 1$$

existe um ponto w com $|w| < 1$ tal que

$$I_w = I \ .$$

Sabemos que $e^{i(\frac{\phi + \phi_0}{2})}$ é o ponto médio de I. Tomando sobre o segmento, que liga este ponto à origem, o ponto w que dista da origem $1 - |I|$, temos

$$w = (1-|I|)\, e^{i\left(\frac{\phi+\phi_o}{2}\right)} \quad \text{e}$$

$$I_w = \left\{ e^{it} : \frac{\phi+\phi_o}{2} - \frac{1-(1-|I|)}{2} \leq t \leq \frac{\phi+\phi_o}{2} + \frac{|I|}{2} \right\}$$

$$= \left\{ e^{it} : \frac{\phi+\phi_o}{2} - \frac{|I|}{2} \leq t \leq \frac{\phi+\phi_o}{2} + \frac{|I|}{2} \right\}$$

$$= \{e^{it} : \phi_o \leq t \leq \phi \} = I \, .$$

Estamos agora em condições de demonstrarmos o teorema que enunciaremos a seguir

(2-15) *Teorema:* Seja μ uma medida finita no círculo unitário complexo $|z| < 1$ e sejam p,q números tais que $0 < p \leq q < \infty$. Seja $S_h = \{re^{i\theta} : \theta 0 \leq \theta \leq \theta 0 + h \, , \, 1-h \leq r < 1\}$ com $0 \leq h < 1$.

Então, uma condição necessária e suficiente para que exista uma constante C tal que, para toda f do espaço H^p vale

(2-16) $$\left\{ \int |f(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq C \, \|f\|_{H^p} \, ,$$

é que exista uma constante A , independente de h , satisfazendo.

$$\mu(S_h) \leq A\, h^{q/p} \, .$$

Demonstração: Pela observação (2-8) vimos que é suficiente fazermos a prova para $p = 2$.

Vamos demonstrar que se (2-16) é válido para toda função f de H^2, então existe uma constante A tal que:

$$\mu(S_h) \leqslant A\, h^{q/2} \quad , \text{ onde}$$

$$S_h = \{\, re^{i\theta} : 1 - h \leqslant r < 1 \quad e \quad 0 \leqslant \theta \leqslant h \,\} .$$

Seja f uma função definida por

$$f(z) = \frac{1}{1 - \alpha z} \quad \text{com} \quad 0 < \alpha < 1 .$$

Temos que f é analítica para $|z| < 1$ e além disso

$$\| f \|_{H^2} = \lim_{r \to 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{1 - \alpha re^{i\theta}} \right|^2 d\theta \right\}^{1/2} =$$

$$\lim_{r \to 1} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha^2 r^2} \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{1/2}} < \infty$$

ou seja, $f \in H^2$

Seja $S'_{1-\alpha} = \{ re^{i\theta} : 0 \leqslant \theta \leqslant 1-\alpha , \alpha \leqslant r \cos \theta < 1\}$

(ver figura 2)

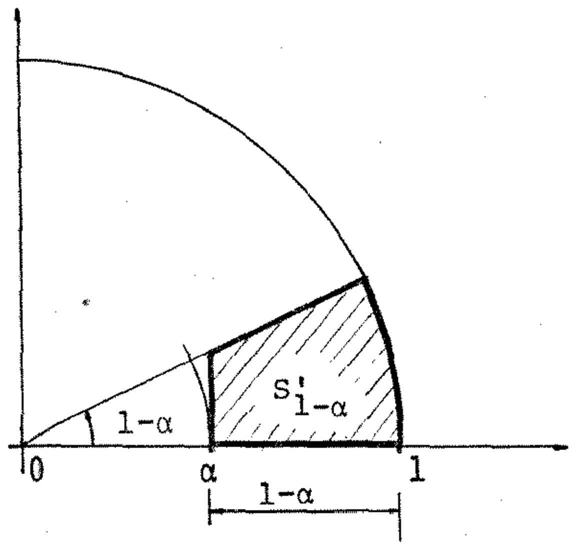

fig. 2

Observemos que para todo $z = re^{i\theta}$ em $S'_{1-\alpha}$ as seguintes desigualdades se verificam:

$$\operatorname{sen}^2\theta \leqslant \operatorname{sen}^2(1-\alpha) < (1-\alpha)^2 < 1$$

e

$$\alpha \leqslant r \cos\theta \leqslant 1 \quad .$$

Então,

$$\begin{aligned} |1-\alpha z|^2 &= (1-\alpha r \cos\theta)^2 + \alpha^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta < \\ & (1-\alpha^2)^2 + \alpha^2(1-\alpha)^2 = \\ & (1-\alpha)^2 . [(1+\alpha)^2 + \alpha^2] = \\ & (1-\alpha)^2 . [2\alpha^2 + 2\alpha + 1] . \end{aligned}$$

Como $2\alpha^2 + 2\alpha + 1$ é uma função crescente para $0 < \alpha < 1$ temos que $2\alpha^2 + 2\alpha + 1 < 5$ e

$$|1-\alpha z|^2 < 5(1-\alpha)^2 < 9(1-\alpha)^2$$

Logo $$|1-\alpha z| < 3(1-\alpha) ,$$

ou seja,

$$\frac{1}{|1-\alpha z|} > \frac{1}{3(1-\alpha)} \quad \text{para todo} \quad z \in S'_{1-\alpha} . \tag{2-17}$$

Por hipótese, como f pertence a H^2 , temos

$$\left\{ \int_{|z|<1} \left| \frac{1}{1-\alpha z} \right|^q d\mu \right\}^{1/q} \leqslant C \, \| f \|_{H^2} = C \left(\frac{1}{1-\alpha^2} \right)^{1/2} .$$

De (2-17) e levando em conta que $S'_{1-\alpha} \subset \{z : |z|<1\}$ obtemos

$$\frac{1}{3(1-\alpha)} \left\{ \mu(S'_{1-\alpha}) \right\}^{1/q} < C \, \frac{1}{(1-\alpha^2)^{1/2}} .$$

Segue que,

$$\left\{ \mu(S'_{1-\alpha}) \right\}^{1/q} < 3C \, \frac{(1-\alpha)^{1/2}}{(1+\alpha)^{1/2}} < 3C(1-\alpha)^{1/2}$$

donde,

$$(2\text{-}18) \qquad \mu(S'_{1-\alpha}) < (3C)^q\ (1-\alpha)^{q/2} .$$

Vamos considerar agora as regiões S_h . Estudaremos dois casos, $h \leqslant \frac{1}{2}$ e $h > \frac{1}{2}$.

Primeiramente seja $h \leqslant \frac{1}{2}$. Tomemos $\alpha = 1-h$ e

$$S'_{2h} = \{ re^{i\theta} : 1-2h \leqslant r\cos\theta < 1 \ \text{ e } \ 0 \leqslant \theta \leqslant h \} .$$

(ver figura 3 abaixo)

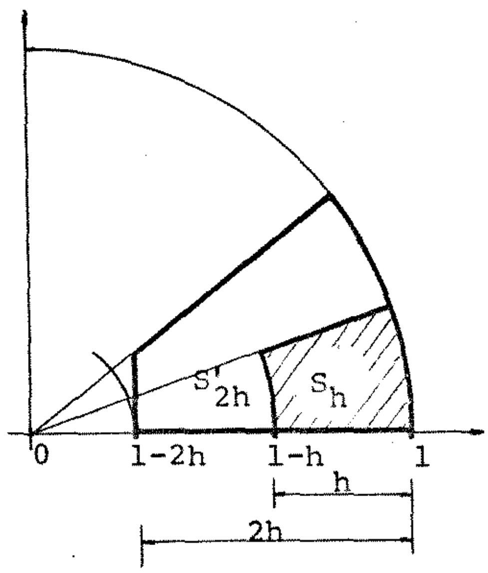

fig. 3

Se $z = re^{i\theta}$ pertence a S_h , temos $r \geqslant 1-h$ e $\cos\theta \geqslant \cos h$. Como $\cos h \geqslant \frac{1-h^2}{2}$ e $h \leqslant \frac{1}{2}$ segue que:

$$\begin{aligned}(1-h)(1-\frac{h^2}{2}) \leqslant (1-h)\cos h &\leqslant \\ (1-h)\cos\theta &\leqslant \\ r\cos\theta &.\end{aligned}$$

Visto que, $h^2 - h + 2 \geqslant 0$, temos

$$(1-h)(1 - \frac{h^2}{2}) \geqslant 1 - 2h \quad .$$

Logo $r \cos\theta \geqslant 1 - 2h$ e portanto z pertence a S'_{2h}. Isto mostra que

$$S_h \subset S'_{2h}$$

donde

$$\mu(S_h) \leqslant \mu(S'_{2h})$$

E por (2-18) temos que para $h \leqslant \frac{1}{2}$

$$\mu(S_h) < (3C)^q \, (2h)^{q/2} \quad .$$

Analisemos agora o caso $h > \frac{1}{2}$. Neste caso temos $(2h)^{q/2} > 1$ e

$$\mu(S_h) < \mu\{z : |z| < 1\} \, (2h)^{q/2} \quad .$$

Logo, para todo $0 < h < 1$, temos que existe uma constante $A = \max\{(3C\sqrt{2})^q, \ \mu\{z : |z| < 1\}\, 2^{q/2}\}$ tal que

$$\mu(S_h) < A \, h^{q/2} \qquad \text{onde} \quad q \geqslant 2$$

como queríamos demonstrar.

Vamos demonstrar, agora, a recíproca, isto é, dado $q\,(2 \leqslant q < \infty)$ e se para todo $h\,(0 \leqslant h < 1)$ o conjunto

$$S_h = \{ re^{i\theta} : 1-h \leq r < 1 , \theta_o < \theta < \theta 0 + h \}$$

satisfaz a propriedade de que existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\mu(S_h) \leq A\, h^{q/2}$$

então para toda função f pertencente a H^2 existe uma constante C tal que

$$\left\{ \int_{|z|<1} |f(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq C \, \| f \|_{H^2} .$$

Como cada f de H^2 é a integral de Poisson de sua função limite, pela observação (2-10) será suficiente provarmos que:

$$\left\{ \int |u(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq C \, \| \phi \|_2$$

onde $u(z)$ é a integral de Poisson da função positiva $\phi \in L^2$.

Para isto, vamos considerar para cada $z = re^{i\theta}$ o arco limitado

$$I_z = \{e^{it} : \theta - \frac{1}{2}(1-r) \leq t \leq \theta + \frac{1}{2}(1-r) \}$$

(ver figura 1) .

Podemos identificar I_z com o intervalo $[\theta - \frac{1}{2} (1-r) , \theta + \frac{1}{2} (1-r)]$.

Seja $\phi(t)$ uma função positiva integrável, de período 2π. Definamos

$$\tilde{\phi}(z) = \sup \frac{1}{|I|} \int_I \phi(t)\,dt$$

onde o supremo é tomado sobre todos os intervalos I tal que I contenha I_z e $|I| < 1$.

Mostremos que para $|z| < 1$ vale a desigualdade

$$u(z) \leq 6\,\pi^2 \left(\tilde{\phi}(z) + \|\phi\|_1 \right)$$

onde u é a integral de Poisson de ϕ, ou seja,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)\,.\,\phi(t-\theta)\,dt \;;\; z = re^{i\theta}$$

e $P(r,t)$ é o núcleo de Poisson.

Vamos considerar 2 casos:

Primeiramente tomemos $r \leq \frac{1}{2}$. Neste caso

$$P(r,t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \leq \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{1-r} \leq 3$$

e portanto

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\,.\,3 \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)\,dt \leq \frac{3}{2\pi} \|\phi\|_1 \,.$$

Analisemos agora o caso $r > \frac{1}{2}$.

Por cálculo direto, temos $P(r,t) = \dfrac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\,\text{sen}^2(\frac{t}{2})}$.

Como $\text{sen}^2(t/2) > \frac{t^2}{\pi^2}$ para t em $[-\pi,\pi]$ teremos

$$P(r,t) \leqslant \frac{2(1-r)}{(1-r)^2 + 4r(t^2/\pi^2)} \leqslant \frac{\pi^2(1-r)}{(1-r)^2 + t^2}.$$

Seja $\delta = 1-r$, $\delta < \frac{1}{2}$.

A série geométrica dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi\left(\frac{|t|}{2^n\delta}\right) \cdot \frac{1}{2^{2n}},$$ onde

χ é a função característica do intervalo $[0,1]$, é igual a

$$\frac{1}{2^{2k}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$$ onde

k é o menor inteiro tal que $\frac{|t|}{\delta} < 2^k$. Logo, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi\left(\frac{|t|}{2^n\delta}\right) \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4^k} \cdot \frac{4}{3} >$$

$$\frac{\delta^2}{3|t|^2} > \frac{\delta^2}{3(|t|^2 + \delta^2)}$$

obtemos

$$P(r,t) \leqslant \frac{3\pi^2}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \chi\left(\frac{|t|}{2^n\delta}\right) \frac{1}{2^{2n}} .$$

Então, para $z = re^{i\theta}$ temos

$$u(z) \leqslant \frac{3\pi^2}{2\delta} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \chi\left(\frac{|t|}{2^n\delta}\right) \frac{1}{2^{2n}} . \phi(t-\theta)dt$$

e daí

$$u(z) \leqslant \frac{3\pi^2}{2\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \int_{-\pi}^{\pi} \chi\left(\frac{|t|}{2^n\delta}\right) . \phi(t-\theta)dt .$$

Como para $|t| > 2^n\delta$ a integral é nula segue que:

$$u(z) \leqslant 3\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\, 2^{2n}\delta} \int_{\substack{[-2^n\delta,2^n\delta] \\ [-\pi,\pi]}} \phi(t)dt .$$

Onde, estamos denotando por

$$\int_{\substack{[-2^n\delta,2^n\delta] \\ [-\pi,\pi]}} \phi(t)dt$$ a integral calculada

sobre $[-2^n\delta,2^n\delta] \cap [-\pi,\pi]$.

Seja N_o o menor inteiro tal que $2(2^n\delta) > 1$ para todo $n \geqslant N_o$.

Temos que

$$u(z) \leqslant 3\pi^2 \sum_{n=0}^{N_o} \frac{1}{2.2^{2n}\delta} \int_{\substack{[-2^n\delta,2^n\delta] \\ [-\pi,\pi]}} \phi(t)dt \; +$$

$$+ \; 3\pi^2 \sum_{n=N_o+1}^{\infty} \frac{1}{2.2^{2n}\delta} \int_{\substack{[-2^n\delta,2^n\delta] \\ [-\pi,\pi]}} \phi(t)dt \; ,$$

onde denominaremos o primeiro somatório por S_1 e o segundo por S_2 .

Estimemos S_1 . Temos que

$$S_1 = \sum_{n=0}^{N_o} \frac{1}{2.2^{2n}\delta} \int_{\substack{[-2^n\delta,2^n\delta] \\ [-\pi,\pi]}} \phi(t)dt \leqslant$$

$$\sum_{n=0}^{N_o} \frac{1}{2^n} \tilde{\phi}(z) \leqslant 2\tilde{\phi}(z) \; .$$

Estimemos S_2 . Temos que

$$S_2 = \sum_{n=N_o+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2(2^n\delta)} \int_{\substack{[-2^n\delta,2^n\delta] \\ [-\pi,\pi]}} \phi(t)dt \leqslant$$

$$\sum_{n=N_o+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \; \|\phi\|_1 \leqslant 2\|\phi\|_1 \; .$$

Logo, para todo $z = re^{i\theta}$ com $r > \frac{1}{2}$ temos

$$u(z) \leq 3\pi^2 (2\tilde{\phi}(z) + 2\|\phi\|_1) = 6\pi^2 (\tilde{\phi}(z) + \|\phi\|_1) .$$

Dos dois casos $r \leq \frac{1}{2}$ e $r \geq 1/2$ temos

$$u(z) \leq 6\pi^2 (\tilde{\phi}(z) + \|\phi\|_1) .$$

Vamos então supor que existe C' tal que

$$\text{(2-19)} \qquad \left\{ \int_{|z|<1} [\tilde{\phi}(z)]^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq C' \|\phi\|_2$$

temos:

$$\left\{ \int_{|z|<1} |u(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq 6\pi^2 \left\{ \int_{|z|<1} |\tilde{\phi}(z) + \|\phi\||^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq$$

$$12\pi^2 (C' \|\phi\|_2 + \mu\{z : |z| < 1\}^{1/q} . \|\phi\|_1)$$

Como, por Schwarz, temos

$$\|\phi\|_1 \leq \mu\{z : |z| < 1\} \|\phi\|_2 .$$

Segue que existe uma constante C tal que

$$\left\{ \int_{|z|<1} |u(z)|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq C \|\phi\|_2 .$$

Logo nos é suficiente provar (2-19) para concluirmos a demonstração.

Para isso, vamos considerar o operador T que a cada ϕ associa $\tilde{\phi}$.

O operador T assim definido é um operador sub-linear, pois:

$$T(\phi_1 + \phi_2)(z) = (\widetilde{\phi_1 + \phi_2})(z) =$$

$$\sup \frac{1}{|I|} \int_I (\phi_1 + \phi_2)(t)dt =$$

$$\sup \frac{1}{|I|} \left| \int_I \phi_1(t)dt + \int_I \phi_2(t)dt \right| \leq$$

$$\sup \frac{1}{|I|} \int_I \phi_1(t)dt + \sup \frac{1}{|I|} \int_I \phi_2(t)dt =$$

$$\tilde{\phi}_1(z) + \tilde{\phi}_2(z)$$

onde o supremo são tomados sobre os arcos I tal que $I \supset I_z$ e $|I| < 1$.

Observemos que se T é do tipo forte (2,q) com $2 \leq q < \infty$ então, por definição, existe uma constante C tal que

$$\left\{ \int_{|z|<1} [\tilde{\phi}(z)]^{q} \, d\mu \right\}^{1/q} < C \, \|\phi\|_2 \, ,$$

o que demonstra o teorema.

Portanto, para concluirmos a demonstração, basta-nos mostrar que T é do tipo forte $(2,q)$.

Como, por definição, T é do tipo (∞,∞) , pelo teorema de interpolação de Marcinkiewicz (1-2) se provarmos que T é do tipo fraco $(1,q)$ com $1 \leqslant q < \infty$ segue que T é do tipo forte $(2,q)$.

Portanto, mostremos que T é do tipo fraco $(1,q)$. Em outras palavras, devo mostrar que existe uma constante $C>0$ tal que:

$$\mu(E_s) \leqslant C \, s^{-q} \, \|\phi\|_1^{q} \tag{2-20}$$

onde

$$E_s = \{z : \tilde{\phi}(z) > s\} \quad \text{com} \quad s > 0 \, .$$

Vamos considerar os valores s tais que $E_s \neq \emptyset$. Para os s tais que $E_s = \emptyset$ o resultado é imediato.

Para provarmos (2-20) usaremos a hipótese de que existe uma constante $A > 0$ tal que $\mu(S_h) \leqslant Ah^{q/2}$ com $q \geqslant 2$.

Por conveniência vamos substituir $q/2$ por q e neste caso temos:

(2-21) $\mu(S_h') \leqslant A\, h^q$ onde $q \geqslant 1$.

Para cada $\varepsilon > 0$, definimos:

$$A_s^\varepsilon = \{z : \int_{I_z} |\phi(t)|\, dt > s(\varepsilon + |I_z|)\}$$

e

$$B_s^\varepsilon = \{z : I_z \subset I_w \text{ para algum } w \in A_s^\varepsilon\} .$$

Façamos algumas considerações sobre os conjuntos definidos acima.

(2-22) Se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ e $z \in A_s^{\varepsilon_2}$ então

$$\int_{I_z} \phi(t)dt > s(\varepsilon_2 + |I_z|) > s(\varepsilon_1 + |I_z|) ,$$

ou seja, $z \in A_s^{\varepsilon_1}$.

Logo $A_s^{\varepsilon_2} \subset A_s^{\varepsilon_1}$ se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

(2-23) Se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ então $B_s^{\varepsilon_1} \supset B_s^{\varepsilon_2}$.

De fato, se $z \in B_s^{\varepsilon_2}$ existe um w pertencente a $A_s^{\varepsilon_2}$ tal que

$I_w \supset I_z$. Por (2-22) $w \in A_s^{\varepsilon_1}$, ou seja, $z \in B_s^{\varepsilon_1}$.

(2-24) Pela própria definição de A_s^{ε} e B_s^{ε} temos que $A_s^{\varepsilon} \subset B_s^{\varepsilon}$.

(2-25) $E_s \subset B_s^{\varepsilon_0}$ para algum ε_0 .

De fato, se z pertence a E_s temos que $\tilde{\phi}(z) > s$, ou seja,

$$\sup_{\substack{I \supset I_z \\ |I|<1}} \frac{1}{|I|} \int_I \phi(t)dt > s .$$

Logo existe um arco I , satisfazendo $|I| < 1$ e $I \supset I_z$, tal que $\frac{1}{|I|} \int_I \phi(t)dt > s$.

Portanto é sempre possível encontrar um ε_0 suficientemente pequeno tal que:

$$\int_I \phi(t)dt > s(|I| + \varepsilon_0) .$$

Pela observação (2-14) existe um w tal que $I = I_w$, segue que

$$\int_{I_w} \phi(t)dt > s(|I_w| + \varepsilon_0) ,$$

então w pertence a $A_s^{\varepsilon_0}$ com $I_z \subset I_w$, ou seja, z pertence a $B_s^{\varepsilon_0}$.

De (2-25) e (2-23) podemos concluir que $E_s \subset B_s^{\varepsilon}$ para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Seja $N \geq \frac{1}{\varepsilon_0}$ então para todo $n \geq N$ temos $E_s \subset B_s^{1/n}$. Logo

$$\mu(E_s) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(B_s^{1/n}) . \tag{2-26}$$

Sejam z_n pontos em A_s^{ε} cujos arcos associados I_{z_n} são disjuntos. Temos que:

$$s \sum_n (\varepsilon + |I_{z_n}|) \leq \sum_n \int_{I_{z_n}} |\phi(t)| dt \leq \| \phi \|_1 . \tag{2-27}$$

Observemos portanto que não pode haver infinitos z_n em A_s^{ε} cujos arcos I_{z_n} são disjuntos. Se existisse um número ilimitado desses pontos então, pela desigualdade acima, ϕ_1 não pertenceria ao L^1 o que é falso.

Usando o lema de recobrimento (2-13) , temos que:

$$A_s^{\varepsilon} \subset \bigcup_{n=1}^{m} \{z : I_z \subset J_{z_n}\} \tag{2-28}$$

onde z_n pertence a A_s^{ε} e os arcos associados I_{z_n} são disjuntos e J_{z_n} tem o mesmo centro que I_{z_n} com $|J_{z_n}| = 5|I_{z_n}|$.

Como para z em B_s^ε, temos que existe w em A_s^ε tal que I_w contém I_z. Segue por (2-28) que I_w está contendo em J_{z_n} para algum n. Logo I_z está contido em J_{z_n} para algum n, donde

$$B_s^\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^{m} \{z : I_z \subset J_{z_n}\} .$$

Portanto

$$\mu(B_s^\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{m} \mu\{z : I_z \subset J_{z_n}\} . \tag{2-29}$$

Passaremos, agora, ao estudo dos conjuntos $\{z : I_z \subset J_{z_n}\}$. Vamos denotar tais conjuntos por A_n.

Consideremos, primeiramente, os conjuntos A_n tais que $|z_n| > 4/5$. Temos

$$|I_{z_n}| = 1 - |z_n| < 1/5 \quad \text{e} \quad |J_{z_n}| = 5|I_{z_n}| < 1 .$$

Seja T a região limitada por J_{z_n} e pelas semi-retas que passam pela origem e pelos pontos extremos de J_{z_n}.

Para z pertencente à T com $|z| < 1 - |J_{z_n}|$ temos $|I_z| > |J_{z_n}|$ o que implica que $I \not\subset J_{z_n}$.

Para z não pertencente a T, temos que a projeção de z está em I_z mas não em J_{z_n}, logo, $I_z \not\subset J_{z_n}$.

Podemos concluir, pelos casos considerados acima, que A_n está contido em $S_{|J_{z_n}|}$ que é a intersecção do conjunto $\{z : |z| > 1 - |J_{z_n}|\}$ com T (ver figura 4 abaixo).

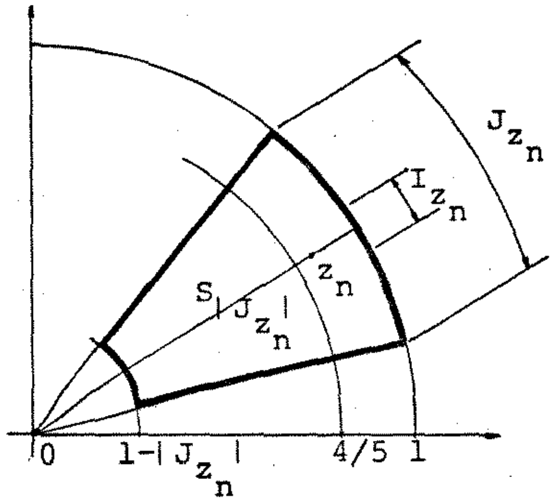

fig. 4

Portanto $\mu(A_n) \leq \mu(S_{|J_{z_n}|})$ com $|z_n| > \frac{4}{5}$. Por (2-23) segue que para cada n existe uma constante B_n tal que

$$\mu(A_n) \leq B_n |J_{z_n}|^q \quad \text{com} \quad |z_n| > \frac{4}{5} .$$

Analisemos, agora, os conjuntos A_n com $|z_n| \leq 4/5$. Então $|I_{z_n}| \geq 1/5$ e $|J_{z_n}| \geq 1$. Donde

$$\mu(A_n) \leq [\mu\{z : |z| < 1\}] . 1 \leq$$

$$[\mu\{z : |z| < 1\}] \, |J_{z_n}|^q .$$

Juntando os dois casos, temos que para todo z_n existe uma constante C_n tal que:

$$\mu(A_n) \leq C_n |J_{z_n}|^q \quad \text{para todo} \quad n \,, \quad 1 \leq n \leq m \,.$$

Portanto $\sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{m} C_n |J_{z_n}|^q$.

Podemos substituir acima $|J_{z_n}| = 5|I_{z_n}|$ e concluir que existe uma constante A tal que:

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) \leq A \sum_{n=1}^{m} |I_{z_n}|^q \,.$$

Por (2-29) obtemos:

$$\mu(B_S^{\varepsilon}) \leq A \sum_{n=1}^{m} |I_{z_n}|^q \,. \tag{2-30}$$

Como $\sum_{n=1}^{m} |I_{z_n}| \geq \left(\sum_{n=1}^{m} |I_{z_n}|^q\right)^{1/q}$ de (2-27) segue que

$$\left(\sum_{n=1}^{m} |I_{z_n}|^q\right)^{1/q} \leq s^{-1} \|\phi\|_1 \,.$$

Por (2-26) e (2-30) temos

$$\mu(E_s) \leq A \sum_{n=1}^{m} |I_{z_n}|^q \,.$$

Portanto

$$\mu(E_s) \leq A\, s^{-q} \, \|\phi\|_1^q ,$$

ou seja, o operador T é do tipo fraco $(1,q)$ o que demonstra o teorema ∎

CAPÍTULO III

Daremos neste capítulo uma aplicação do teorema (2-15). Além disso, tomando a medida de Lebesque mostraremos que o teorema se aplica apenas para p e q com $0 < \frac{q}{p} \leq 2$.

Aplicação : "Se $0 < p < q < \infty$, então $f \in H^p$ implica

$$\int_0^1 (1-r)^{q/p-2} M_q^q(r,f)\,dr < \infty$$

onde

$$M_q^q(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q \, d\theta \text{ ".}$$

Demonstração: Basta verificarmos que as condições do teorema (2-15) estão satisfeitas.

Para isso, seja μ a medida em $|z| < 1$ tal que para $z = re^{i\theta}$

$$d\mu = (1-r)^{q/p-2}\,dr\,d\theta \; .$$

Observemos que

$$\mu(S_h) = \int_{1-h}^{1} \int_0^h (1-r)^{q/p-2}\,dr\,d\theta = \frac{h^{q/p}}{(\frac{q}{p} - 1)} \qquad \text{onde } S_h$$

é o conjunto definido no teorema (2-15).

Logo, existe uma constante $A = \dfrac{1}{q/p-1} > 0$ tal que $\mu(S_h) \leqslant A h^{q/p}$.

Portanto é válida a hipótese do teorema para $q > p$ donde temos que para toda função $f \in H^p$

$$\int_{|z|<1} |f(re^{i\theta})|^q \, d\mu \leqslant A \|f\|_{H^p}^q .$$

Agora, como

$$\int_{|z|<1} |f(re^{i\theta})|^q \, d\mu =$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\mu} (1-r)^{q/p-2} \, |f(re^{i\theta})|^q \, d\theta \, dr$$

e $f \in H^p$ segue o resultado. ∎

Observemos, agora, o caso particular da medida de Lebesque.

Seja μ a medida de Lebesque em $|z| < 1$. Temos que $\mu(S_h) = h^2 - \dfrac{h^3}{2}$. Notemos que $\mu(S_h) \leqslant A h^{q/p}$ se e só se $\dfrac{q}{p} \leqslant 2$.

De fato, como $0 < h < 1$ temos que $h^2 - \dfrac{h^3}{2} < h^2 \leqslant$ $\leqslant h^{q/p}$ para $\dfrac{q}{p} \leqslant 2$. Portanto $\mu(S_h) \leqslant h^{q/p}$ com $\dfrac{q}{p} \leqslant 2$.

Agora, supondo que existe uma constante A tal que $\mu(S_h) \leq \leq A h^{q/p}$ para $q/p > 2$ teremos $h^2 - \frac{h^3}{2} \leq A h^{q/p}$ e isto é equivalente a

$$1 - \frac{h}{2} \leq A\, h^{q/p-2}$$

donde temos uma contradição pois A independe de h.

Aplicando o teorema obtemos: se $0 < p < \infty$ e $f \in H^p$ então a desigualdade

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q \, d\theta \, dr \right\}^{1/q} \leq C \, \| f \|_{H^p}$$

é válida apenas para q tal que $p \leq q \leq 2p$.

REFERÊNCIAS

[1] APOSTOL, T. , Mathematical Analysis, 2a. edição, Addison Wesley - 1965.

[2] CARLESON, L. , Interpolations by Bounded Analytic Functions and the corona problem , Ann. of Math. 76/3 (1962), 547 - 559.

[3] COIFMAN, R.R. and WEISS, G., Extension of Hardy Spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1971), 569-645.

[4] DUREN, P.L., Extension of a theorem of Carleson, Bull. Amer. Math. Soc.75(1969), 143-146.

[5] ROYDEN, H.L., Real Analysis, 2a. edição,Macmillan, New York, 1968.

[6] TOLSTOV, G.P., Fourier Series, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1962.

[7] ZIGMUND, A. , Trigonometric Series, Vol. I e II, Cambridge Univ. Press., 1968.